Übungsblatt 5

Übung 5.1 Nehmen Sie an, dass in einem zweidimensionalen Feature-Space die Entscheidungsregel zwischen zwei Klassen ω_a und ω_b durch die folgenden linearen Diskriminatenfunktionen gegeben seien:

$$g_a(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a_0 \quad \text{und} \quad g_b(\vec{x}) = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b_0$$

Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Entscheidungsgrenze (Decision Boundary) durch eine Gerade im 2d-Featurespace gegebenen ist, indem Sie die Decision Boundary als Gerade in Koordinatendarstellung $x_2 = m\,x_1 + b$ oder in Hessescher Normalform $\vec{n}^t\vec{x} = d$ darstellen.

Übung 5.2 Rechnen Sie mit den Regeln der Vektorrechnung bzw. Matrixmultiplikation nach, dass mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 = (\vec{x} - \vec{\mu})^t \, \mathbf{\Sigma}^{-1} \, (\vec{x} - \vec{\mu})$$

Übung 5.3 Die Entscheidungsregel des *Template-Matching* ist:

> “Jede Klasse ω_i sei durch genau einen *Prototyp* $\vec{p}_i$ repräsentiert. Ordne das Muster $\vec{x}$ der Klasse zu, deren Prototyp $\vec{p}_i$ es am nächsten liegt: $||\vec{x} - \vec{p}_i|| < ||\vec{x} - \vec{p}_j||$ für alle $j \neq i$”

Zeigen Sie, dass sich diese Regel als ein Spezialfall der Bayesschen Entscheidungsregel für normalverteilte Features ergibt, wenn man folgende Annahmen macht:

- die a-priori Wahrscheinlichkeiten aller Klassen sind gleich
- die Kovarianzmatrizen $\mathbf{\Sigma}_i$ der bedingten Wahrscheinlichkeiten aller Klassen sind gleich und von der Form $\mathbf{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{I}$

Was entspricht in diesem Fall den Prototypen $\vec{p}_i$?

Hinweis: Betrachten Sie die Diskriminantenfunktion $\ln P(\omega_i) + \ln p(\vec{x}|\omega_i)$.