Übungsblatt 9

Übung 9.1 Zeigen Sie, dass aus den definierenden Eigenschaften einer Norm automatisch folgt

$$\|\vec{x}\| \geq 0 \quad \text{für alle } \vec{x} \in V$$

Übung 9.2 Zeigen Sie, dass jeder aus einer *Norm* abgeleitete Abstand

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

in der Tat die drei Eigenschaften einer Metrik erfüllt:

a) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

b) $d(x, y) = d(y, x)$

c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Übung 9.3 Zeigen Sie, dass die triviale Metrik

$$d_{triv}(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ wenn } x = y \\ 1 \text{ wenn } x \neq y \end{cases}$$

sich nicht aus einer Norm herleiten lässt. M.a.W.: es gibt keine Norm $\|.\|$ derart, dass

$$d_{triv}(x, y) = \|x - y\| \quad \text{für alle } x, y$$

Hinweis: Wählen Sie $y = 0$ (den Nullvektor), um ein Gegenbeispiel zu konstruieren.

Übung 9.4 Zeigen Sie, dass die Maximumsnorm $\|\vec{x}\| = \max_i\{|x_i|\}$ nicht über ein Skalarprodukt dargestellt werden kann, indem Sie ein Beispiel für zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ finden, die die Parallelogrammgleichung verletzen:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2\left(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2\right)$$