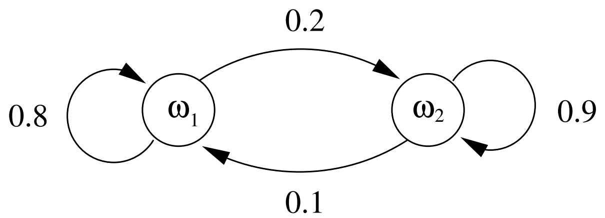
Übungsblatt 10

Übung 10.1 Betrachten Sie eine Markov-Kette mit zwei Zuständen $\{\omega_1, \omega_2\}$ und den folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten:

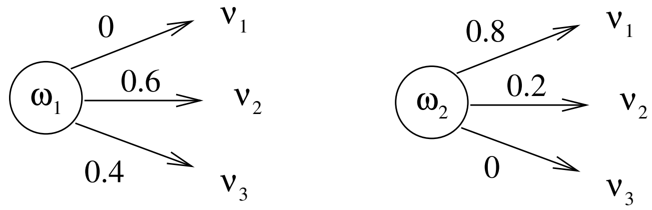


a) Stellen Sie die Übergangsmatrix A auf und überprüfen Sie, dass gilt $\sum_{j=1}^{2} a_{ij} = 1$

b) Nehmen Sie an, dass das System zur Zeit $t = 0$ mit Sicherheit im Zustand ω_1 startet, d.h. $p_1(0) = P(\omega(0) = \omega_1) = 1$ und $p_2(0) = 0$. Berechnen Sie mit R für verschiedene Werte von t die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten $\underline{p}(t) = (p_1(t), p_2(t))$ für die beiden Zustände. (Achtung: Vektor-Matrix Multiplikation mit `%*%`). Was passiert, wenn t groß wird?

c) Ergeben sich andere Wahrscheinlichkeiten für große t wenn Sie annehmen, dass das System mit Sicherheit in Zustand ω_2 startet?

Übung 10.2 Ein Hidden Markov Modell bestehe aus den Hidden States ω_1 und ω_2 mit den Übergangswahrscheinlichkeiten der vorigen Aufgabe. Ferner habe es drei Visible States ν_1, ν_2, ν_3, die von den ω_i mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten emittiert werden:



a) Das System sei zu Beginn im Zustand ω_1, d.h. $P(\omega(1) = \omega_1) = 1$. Berechnen Sie mit dem Forward-Algorithmus die Wahrscheinlichkeit, dass die Zustandsfolge (ν_3, ν_1, ν_2) beobachtet wird.
(Kontrolle: nach meiner Rechnung müsste 0.015360 herauskommen)

b) Offenbar ist für die Beobachtung (ν_3, ν_1, ν_2) die wahrscheinlichste Hidden State Folge gegeben durch $(\omega_1, \omega_2, \omega_2)$ (Warum?). Verifizieren Sie, dass der Viterbi-Algorithmus dasselbe Ergebnis liefert.